Φυλλάδιο 2 ασκ 1

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{1,4}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{3,2}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_{2,1}(-2) \\ A_{4,1}(-3) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{4,3}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} M_2\left(\frac{1}{8}\right) \\ E_{3,4} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \underline{3} & 2 \end{pmatrix} A_{4,2}(-3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5/4 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_{1,2}(2) \\ A_{4,3}\left(\frac{-5}{4}\right) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_{1,3} \\ A_{2,3} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ad 2.)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5/2 & 3/2 \\ 3 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -3/2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 5/2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -\frac{5}{11} & \frac{6}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5-\frac{30}{11} & -7+\frac{36}{11} & \frac{6}{11} \\ -2+\frac{15}{11} & 3-\frac{18}{11} & -\frac{3}{11} \\ -\frac{5}{11} & \frac{6}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

abk 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ασκ 4) $3x + 7y + 3z = 2$

$2x + 5y + 4z = 11$ okay?

$3x + 7y + 4z = 14$

ασκ 5) $3x_1 - 4x_2 + x_3 = 8$

$x_1 + 2x_2 = 0$

$3x_2 + 2x_3 = -7$

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & -6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 6 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$z = -2$

$y = -1$

$x = 2$

Ασκ 6) $\begin{vmatrix} i & 0 & i \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & a \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} i & 0 & i \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ i & 0 & i \\ 2 & a & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -i & 2i \\ 0 & a-2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & a-2 & 6 \end{pmatrix}$

$\det A \neq 0$

$\det A = 4i + ai - 2i + 4i^{\text{ναι}} = 2i + 2ai = 2(1+a)i \neq 0$ θέλαμε;;;

$a \neq -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6+2(a-2) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2a+2 \end{pmatrix}$$ $a = 2$ σωστό $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$ $a \neq 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

Για $\alpha = -1$ ο ανηγμένος κλιμακωτός δεν είναι ο ταυτοτικός

$$\det A = \sum_{t=1}^{n} (-1)^{t+i} a_{i,t} \det(A_{i,t}) = \sum_{t=1}^{n} (-1)^{t+j} a_{t,j} \det(A_{j,t})$$

Οι ιδιότητες της ορίζουσας για τις γραμμές του πίνακα ισχύουν κ' για τις στήλες.

<u>Πρόταση:</u> $\sum_{t=1}^{n} (-1)^{t+i} a_{j,t} \det(A_{i,t}) = \begin{cases} \det A & \text{όταν } i=j \\ 0 & \text{όταν } i \neq j \end{cases}$

<u>Απόδειξη:</u> Θεωρούμε τον πίνακα A' ο οποίος προκύπτει από τον A, όπου η i-στήλη του A έχει αντικατασταθεί από την j-στήλη. Δηλαδή ο A' έχει δύο στήλες ίσες.
Άρα $\det A' = 0$

$$\det A' = \sum_{t=1}^{n} (-1)^{t+i} a'_{i,t} \det(A'_{i,t}) = \sum_{t=1}^{n} (-1)^{t+i} a_{j,t} \det(A_{i,t}) = 0, \text{ για } i \neq j$$

i-στήλη

$a'_{i,t} = a_{j,t}$

i-στήλη A' = j-στήλη του A

$A'_{i,t}$ είναι ο πίνακας που δημιουργείται αν διαγράψουμε την i-στήλη κ' t γραμμή
$A'_{i,t} = A_{i,t}$

<u>Ορισμός:</u> Έστω A είναι $n \times n$ πίνακας με $adj(A)$ συμβολίζουμε τον προσαρτημένο (adjoint) πίνακα του, ο οποίος δίνεται από τα στοιχεία. $adj(A) = \left((-1)^{i+j} \det A_{i,j}\right)^t$

Δηλαδή το $a'_{i,j}$ στοιχείο του $adj(A)$ είναι το $(-1)^{i+j} \det(A_{j,i}) = a'_{i,j}$

π.χ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $adj A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Θεώρημα: Έστω ότι $\det A \neq 0$. Τότε ο αντίστροφος του δίνεται από

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left((-1)^{(t)} \det(i,j)\right)^t$$

Απόδειξη: Θέλουμε $A^{-1}A = I$.

$$B = \frac{1}{\det A}\left((-1)^{(t)} \det(A_{i,j})\right)^t$$

Το i,j στοιχείο του γινομένου του πίνακα
με τον A. Αν δδ $BA = I \Rightarrow B = A^{-1}$
Το i,j στοιχείο είναι η i-γραμμή του B επί την j-στήλη του A. Η i-γραμμή του B δίνεται από $\frac{1}{\det A}\left((-1)^{i+1} A_{1,i}, (-1)^{i+2} \det A_{2,i}, \dots, (-1)^{i+n} \det A_{n,i}\right)$

Άρα πρέπει να πάρουμε τον αντίστροφο πίνακα

Το i,j στοιχείο του B.A είναι $\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{\det A}\left((-1)^{i+t} \underbrace{\det(A_{t,i})\, a_{t,j}}_{i=j\ \det A}\right) \Rightarrow$ άθροισμα είναι 0

Όταν $i = j$

$$\frac{1}{\det A} \det A = 1$$

SYSTHMA CRAMER

Θεώρημα: Έστω ένα γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους. A ο πίνακας των συντελεστών κ' b ο $n \times 1$ πίνακας των σταθερών όρων. Υποθέτουμε ότι $\det A \neq 0$.
Τότε ο τυχαίος άγνωστος x_i δίνεται από τον τύπο.

$$x_i = \frac{\det(A^{(i)}, b)}{\det A}$$

$Ax = b$

$A = (a_{i,j})$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Ο πίνακας $(A^{(i)}, b)$ δημιουργείται αν αντικαταστήσουμε την i-στήλη του A με τη στήλη b

π.χ. $x_1 + 2x_2 = 5$
$3x_1 + 4x_2 = 6$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}}{-2} \qquad x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}}{-2}$$

$$x_1 = -\frac{8}{2} = -4 \qquad x_2 = \frac{-9}{-2} = \frac{9}{2}$$

Απόδειξη: Έστω $Ax=b$ κ' $\det A \neq 0$. Άρα $\exists A^{-1}$. Έχουμε $A^{-1}Ax = A^{-1}b$. $x = A^{-1}b$. Το x_i θα δίνεται από το γινόμενο της i-γραμμής του A^{-1} επί τη στήλη b

$$x_i = \sum_{t=1}^{n} a'_{i,t}\, b_t \quad (*)$$

Το $a'_{i,t}$ είναι το i,t στοιχείο του A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left((-1)^{i+j} \det A_{i,j}\right)^t$$

$$a'_{i,t} = \frac{1}{\det A}(-1)^{i+t} \det A_{t,i} \quad (**)$$

$$x_i = \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{\det A}(-1)^{i+t} \det A_{t,i}\, b_t = \frac{1}{\det A}\det(A^{(i)}, b)$$

Η ορίζουσα του Vandermonde

$$\det\begin{pmatrix} 1 = x_1^0 & 1 = x_2^0 & 1 = x_n^0 \\ x_1 & x_2 \;\cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{2 \le i \le n} \prod_{1 \le j < i} (x_i - x_j)$$

π.χ.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix} = \prod_{2 \le i \le 3} \prod_{1 \le j < i} (x_i - x_j)$$

$i = 2 \Rightarrow 1 \le j < 2$ $\qquad x_2 - x_1$

$i = 3 \quad 1 \le j < 3$ $\qquad (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$

$\det\left(\quad \right) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Έστω V ένα σύνολο εφοδιασμένο με δύο πράξεις $\oplus : V \times V \to V$

$\odot : \mathbb{R} \times V \to V$

Αν $u, v \in V$ κ' $r \in \mathbb{R}$, τότε $u \oplus v \in V$ κ' $r \odot u \in V$.

Το V με αυτές τις πράξεις καλείται διανυσματικός ή γραμμικός χώρος, αν ισχύουν 8 ιδιότητες:

1) Προσεταιριστική $(u_1 \oplus u_2) \oplus u_3 = u_1 \oplus (u_2 \oplus u_3)$

2) Ουδέτερο στοιχείο $\bar{0}$, ώστε $u \oplus \bar{0} = \bar{0} \oplus u = u$, $\forall u \in V$

3) Αντίθετο στοιχείο του u, είναι ένα u' ώστε $u \oplus u' = u' \oplus u = 0$

4) Αντιμεταθετικότητα $u \oplus v = v \oplus u$. Με την αυτήν την πράξη το V είναι αβελιανή ομάδα.

5) $r \odot (u \oplus v) = r \odot u \oplus r \odot v$, $\forall r \in \mathbb{R}$ $\forall u, v \in V$

6) $(r + r') \odot u = r \odot u \oplus r' \odot u$

7) $(r r') \odot u = r \odot (r' \odot u)$

8) $1 \odot u = u$.

Αν μας δοθεί ένα σύνολο με δύο πράξεις για να είναι δ.χ. πρέπει να ελέγξουμε κ' τις 8 ιδιότητες.

π.χ. $\mathbb{R}$ με την πρόσθεση του κ' το γινόμενο του είναι δ.χ., διότι είναι κάτι παραπάνω, είναι σώμα

$M(n \times n, \mathbb{F})$ $\mathbb{F}$ σώμα $= \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ή πεπερασμένο

π.χ. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ με πρόσθεση.

$(x_1, \dots, x_n) \oplus (x_1', \dots, x_n') = (x_1 + x_1', \dots, x_n + x_n')$ κ' γινόμενο.

$r(x_1, \dots, x_n) = (r x_1, \dots, r x_n)$

Με αυτές τις πράξεις το $\mathbb{R}^n$ γίνεται δ.χ.

π.χ. Εξετάστε αν το $\mathbb{R}^2$ με πράξεις $(x,y)\oplus(x',y') = (x+x', y+y')$ είναι δ.χ.
$r\odot(x,y) = (x,y)$

Οι 4) πρώτες ιδιότητες της $\oplus$ ισχύουν $2\odot(x,y) = (x,y)$
$$\cancel{=} \; (1+1)\odot(x,y) = 1\odot(x,y) \oplus 1\odot(x,y) = (x,y)\oplus(x,y) = (2x, 2y)$$

Άρα δεν είναι δ.χ. διότι δεν ισχύει η προηγούμενη ιδιότητα.

π.χ. Εξετάστε αν το $\mathbb{R}^2$ με πράξεις $(x,y)\oplus(x',y') = (xx', yy')$ κ' $r\odot(x,y) = (rx, ry)$
είναι δ.χ.

$$r\odot((x,y)\oplus(x',y')) = r\odot(xx', yy') = (rxx', ryy') \neq$$
$$r\odot(x,y) \oplus r\odot(x',y') = (rx, ry)\oplus(rx', ry') = (r^2xx', r^2yy')$$